

FTAMP 14.07.09

DOI: <https://doi.org/10.47344/sdu20bulletin.v66i1.1286>Жанболат Қайынбаев¹, Жандос Бекіш^{2*}^{1,2} SDU University, Қаскелең, Қазақстан*e-mail: manshzhandos@gmail.com

ҮШБҰРЫШТЫҢ ТАМАША КЕСІНДІЛЕРІ ЖАЙЛЫ КҮРДЕЛІ ЕСЕПТЕР ЖӘНЕ ОЛАРДЫ ШЕШУ ТӘСІЛДЕРІ

Аңдатпа. Жалпы геометриялық есептердің жартысы үшбұрыштарға байланысты болып келеді. Ал, сол есептердің тағы да жартысы үшбұрыштардың биіктігі, биссектрисасы және медианаларына байланысты болып келеді. Осы проценттердің өзі, болашақ мектеп математика пәні мұғалімдерін дайындау барысында үшбұрыштардың биіктігі, биссектрисасы, медианасы және олардың қасиеттері жайлы есептерге көп көңіл бөлу қажеттіліктерін білдіреді. Мақала, осындай маңызды мәселеге арналған. Мақалада үшбұрыштардың биіктіктері, биссектрисаларымен медианаларының әр түрлі комбинациялары негізінде шығарылатын әртүрлі мағынадағы есептерді шығару тәсілдері қарастырылған. Мақала, бүгінгі және болашақ математика пәндері мұғалімдеріне арналған.

Түйін сөздер: есеп, үшбұрыш, үшбұрыштың элементтері, үшбұрыштың түрлері, бұрыш, бұрыштың биссектрисасы, үшбұрыштың биіктігі, үшбұрыштың биіктігін табу формулалары, үшбұрыштың биіктігінің қасиеттері, үшбұрыштың биссектрисасы, үшбұрыштың биссектрисасының ұзындығы, үшбұрыштың биссектрисасының қасиеттері, үшбұрыштың медианасы, үшбұрыштың медианасының ұзындығы, үшбұрыштың медианасының қасиеттері, Менелай формуласы

Кіріспе

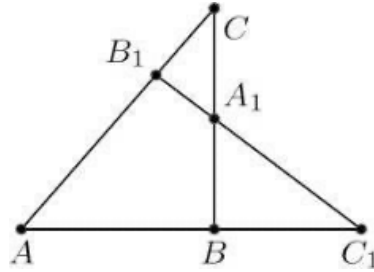
Жалпы, мектеп оқушылары, студенттер, магистранттар және басқа да геометриялық мәселелер бойынша білім алуға талпынушылар сапалы геометриялық білім алу үшін ҮШБҰРЫШ мәселесін зерттеуден бастау керек. Неге? Оның екі үлкен себебі бар. Біріншісі, үшбұрыш деген фигура, ол – өз аты айтып тұрғандай үш бұрыштан құралады. Ал, бұрыш геометрияның негізгі ұғымы (геометрияның және оның ішінде планиметрияның негізгі ұғымдары – нүкте, түзу, жазықтық) болып табылмаса да ең басты ұғымдарының бірі [1]. Бұрышы жоқ фигура геометрияда тек қана геометрияның басты ұғымдарымен қатар, кесінді, түзудің бөліктері, сызықтар, дөңгелек және оның шекарасы – шеңбер немесе дөңгелектің кейбір элементтері ғана. Ал, өмірде бұрыш жоқ жер бар ма екен ...? Екіншіден, үшбұрыш – кез келген төртбұрыштың (шаршы, тіктөртбұрыш, ромб, трапеция, параллелограмм, кез келген төртбұрыш), бесбұрыштың, алтыбұрыштың және т.б диагональдары сызылса пайда болатын фигура. Сол сияқты үшбұрыш кеңістіктік денелердің де негізі [2]. Осындай жағдайларға байланысты білім алушылардың геометриялық білімдерінің негізі олардың үшбұрыш жайлы білімдері негізінде қалыптасады десек қателеспейміз деп ойлаймыз. Ал, үшбұрыш мәселесінде оның тамаша сызықтары өте маңызды роль атқарады.

Сол сияқты, жалпы білім беретін мектеп қабырғасындағы геометрия пәні бағдарламасында Менелай және Чева теоремалары мүлдем қарастырылмайды. Өйткені біріншіден: бұл теоремаларды қолдану ауқымды уақытты талап етеді. Соған қарамастан бұл теоремаларды үшбұрыштарға байланысты көптеген есептерді шешу барысында қолдануға болатынын арнайы мектептер қолданысқа кеңінен пайдаланады. Әсіресе математика пәнінен олимпиадаларға қатысу үшін керек тақырыптар немесе теоремалар болып табылады. . Оның сыртында, қазіргі кезде математикаға қабілетті оқушылар тек қана мектеп математика бағдарламасымен шектеліп қалмайтыны белгілі. Олар әр түрлі жоба жұмыстарын орындау барысында өз беттерімен математикалық білімдерін кеңейтетіні анық. Мұндай жағдайларда, үшбұрыштардың ұқсастығына байланысты шешілетін есептерді Минелай мен Чева

теоремалары негізінде де шешуге болады және ол жол математикалық тұрғыдан қарағанда тиімді жол болып саналады. Сол себепті, мақала барысында бұл жағдайларға да көңіл бөлінеді.

Теориялық негіз

Менелай теоремасы: ABC үшбұрышында BC, CA и AB түзілері A_1 , B_1 и C_1 нүктелерін сәйкесінше қамтысын.



$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$$

болған кезде ғана A_1 , B_1 и C_1 нүктелері бір түзудің бойында жатады.

Чева теоремасы: ABC үшбұрышында оның төбелерінен кез келген үш түзу сызылсын және олар үшбұрыш қабырғаларын A_1 , B_1 и C_1 нүктелерінде қисын (A_1 – BC-да, B_1 – AC-да, C_1 – AB-да).

Онда келесі тұжырым орын табады:

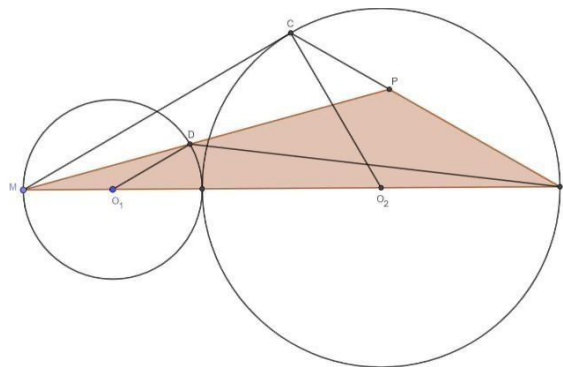
$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1$$

Зерттеу нәтижелері

1. MNP үшбұрышының (1 сурет.) NM қабырғасында центрлері O_1 және O_2 болатын екі шеңбер сырттай жанасқан. Шеңберлер MP және PN үшбұрыш қабырғаларын сәйкесінше M , D және N , C нүктелерінде қияды.

$MO_1 = O_1D = 3$ және $NO_2 = O_2C = 6$. MCO_2 және O_1ND үшбұрыштарының аудандарының қатынасы $\frac{8\sqrt{3}}{5}$ және $PN = MP\sqrt{2 - \sqrt{3}}$. MNP үшбұрышының ауданын табыңыз.

Шешімі:



1 сурет

$$\begin{aligned}\frac{S_{CMO_2}}{S_{DNO_1}} &= \frac{8}{5}\sqrt{3} \\ \frac{NP}{MP} &= \sqrt{2 - \sqrt{3}} \\ MO_1 = O_1D &= 3 \\ NO_2 = O_2C &= 6 \\ S_{MNP} &= ?\end{aligned}$$

Шешімі:

$\angle PNM = \alpha$, $\angle PMN = \beta$ болсын. Онда синустар теоремасы бойынша MPN :

$$\begin{aligned}\frac{NP}{\sin \beta} &= \frac{MP}{\sin \alpha} \\ \sqrt{2 - \sqrt{3}} &= \frac{a - b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \begin{cases} 2ab = \sqrt{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \\ a &= \frac{1}{\sqrt{2}}, b = \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

$$\frac{NP}{MP} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}. \quad (1)$$

$\angle PNM = \alpha$ болғандықтан $\angle CO_2M = 2\alpha$ (центрлік бұрыш). Сәйкесінше $\angle DO_1N = 2\beta$.

$$\begin{aligned}\frac{S_{CMO_2}}{S_{DNO_1}} &= \frac{\frac{CO_2 \cdot O_2M \cdot \sin 2\alpha}{2}}{\frac{DO_1 \cdot O_1N \cdot \sin 2\beta}{2}} = \frac{6 \cdot 12 \cdot \sin 2\alpha}{3 \cdot 15 \cdot \sin 2\beta} = \frac{8}{5}\sqrt{3} \\ \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta} &= \sqrt{3} \\ \frac{2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{2 \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta} &= \sqrt{3} \\ \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} &= \sqrt{3} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot (\sqrt{3} - 1) \\ \cos \alpha &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot (\sqrt{3} - 1) \cdot \cos \beta\end{aligned} \quad (2)$$

(1) теңдеуді қолданып

$$\begin{aligned}\frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha} &= 2 - \sqrt{3} \\ \frac{1 - \cos^2 \beta}{1 - \cos^2 \alpha} &= 2 - \sqrt{3}\end{aligned} \quad (3)$$

аламыз.

(2) теңдеудің екі жағын квадраттаймыз

$$\cos^2 \alpha = \frac{3}{2}(3 - 2\sqrt{3} + 1) \cdot \cos^2 \beta$$

$$\cos^2 \alpha = (2 - \sqrt{3}) \cdot 3 \cdot \cos^2 \beta$$

(3) -ке қоямыз

$$\begin{aligned}
\frac{1 - \cos^2 \beta}{1 - (2 - \sqrt{3}) \cdot 3 \cdot \cos^2 \beta} &= 2 - \sqrt{3} \\
1 - \cos^2 \beta &= 2 - \sqrt{3} - 3(7 - 4\sqrt{3}) \cos^2 \beta \\
(20 - 12\sqrt{3}) \cos^2 \beta &= 1 - \sqrt{3} \\
\cos^2 \beta &= \frac{\sqrt{3} - 1}{12\sqrt{3} - 20} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{8} \\
\cos \beta &= \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} \\
\cos \alpha &= \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ
\end{aligned}$$

(1) тендеуден:

$$\begin{aligned}
NP &= (\sqrt{3} - 1)k \\
MP &= \sqrt{2}k.
\end{aligned}$$

MNP үшбұрышында косинустар теоремасын қолданып,

$$\begin{aligned}
MP^2 &= NP^2 + MN^2 - 2NP \cdot MN \cdot \cos \alpha \\
2k^2 &= (4 - 2\sqrt{3})k^2 + 18^2 - 2(\sqrt{3} - 1)k \cdot 18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\
k^2 &= (2 - \sqrt{3})k^2 + 18 \cdot 9 - 9\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3} - 1)k \\
(1 - \sqrt{3})k^2 + 9\sqrt{3} \cdot (1 - \sqrt{3})k + 18 \cdot 9 &= 0 \\
k^2 + 9\sqrt{3}k - 81(\sqrt{3} + 1) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D &= 81 \cdot 3 + 4 \cdot 81 \cdot (\sqrt{3} + 1) = 81(7 + 4\sqrt{3}) = (9(\sqrt{3} + 2))^2 \\
k_{1,2} &= \frac{-9\sqrt{3} \pm 9(\sqrt{3} + 2)}{2} = 9; -9\sqrt{3} - 9
\end{aligned}$$

аламыз.

$k > 0$ болғандықтан, $k = 9$. Бұдан

$$\begin{aligned}
NP &= 9(\sqrt{3} - 1) \\
MP &= 9\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Содан кейін

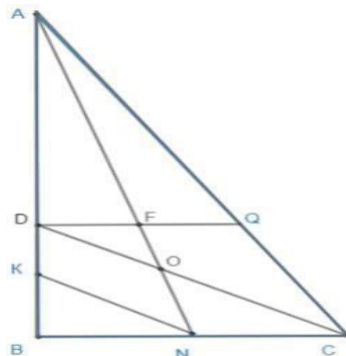
$$S_{MNP} = \frac{MN \cdot NP \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{18 \cdot 9(\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{81(\sqrt{3} - 1)}{2}$$

аламыз.

$$\text{Жауабы: } \frac{81(\sqrt{3} - 1)}{2}.$$

2. ABC тік бұрышты үшбұрыштың ($\angle B = 90^\circ$) AN медианасы мен CD биссектрисасы O нүктесінде қиылысады (2 сурет.). CO мен OD кесінділерінің ұзындықтары сәйкесінше 9 және 5 тең. ABC үшбұрышының ауданын табыңыз.

Шешімі:



2 сурет

$DQ \parallel BC$ болатындай DQ кесіндісін жүргіземіз.

$BN = NC = a$, $AD = c$, $BD = 2b$ деп белгілейік.

$\triangle DFO \sim \triangle ONC$, $\angle FOD = \angle NOC$ (вертикаль бұрыштар), $\angle QDO = \angle BCD$

(айқын бұрыштар).

$$\frac{DF}{NC} = \frac{FO}{ON} = \frac{DO}{OC} \Rightarrow \frac{DF}{a} = \frac{5}{9}, \quad DF = \frac{5}{9}a$$

$\triangle ABN \sim \triangle ADF$

$$\frac{DA}{AB} = \frac{DF}{BN} = \frac{AF}{AN} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{\frac{5}{9}a}{a}, \quad \frac{AD}{AB} = \frac{5}{9}, \quad \frac{c}{c+2b} = \frac{5}{9}$$

$$c = 2,5b.$$

$KN \parallel DC$ болатындай параллель түзу жүргізейік. Онда $DC = 14$, $NK = 7$.

$KB = KD$

$$AB = DB + AD = 2b + 2,5b = 4,5b.$$

$\frac{BC}{BD} = \frac{AC}{AD}$ (биссектриса қасиеті бойынша);

$$\frac{2a}{2b} = \frac{AC}{c};$$

$$a = \frac{\sqrt{(4,5b)^2 + 4a^2}}{2,5b};$$

$$2,5a = \sqrt{(4,5b)^2 + 4a^2}$$

$$b = \frac{a}{3}.$$

$\triangle KBN$

$$KB^2 + BN^2 = KN^2 \Rightarrow b^2 + a^2 = 7^2;$$

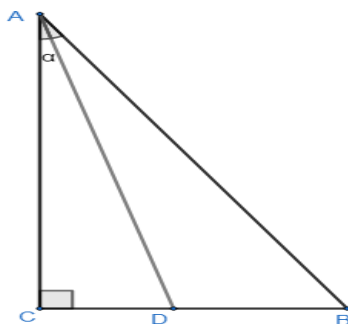
$$\frac{a^2}{9} + a^2 = 49; \quad a = \frac{21}{\sqrt{10}}; \quad b = \frac{7}{\sqrt{10}}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 4,5 \cdot \frac{21}{\sqrt{10}} \cdot 2 \cdot \frac{7}{\sqrt{10}} = \frac{1323}{20}.$$

Жауабы: $\frac{1323}{20}$.

3. Тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасы a тең (3 сурет.), ал үшбұрыштың бір сүйір бұрышының биссектрисасы $\frac{a}{\sqrt{3}}$ тең. Үшбұрыштың катеттерінің ұзындығын табыңыз.

Шешімі:



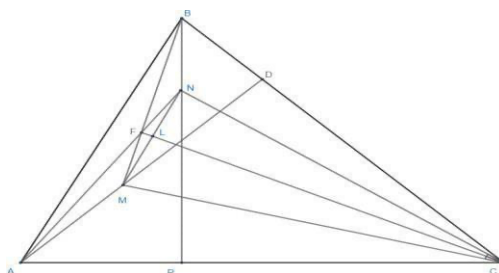
3 сурет

$$\begin{aligned}
 AB = a, AD &= \frac{a}{\sqrt{3}}, \\
 AC = b \text{ деп белгілейік, онда:} \\
 \cos \alpha &= \frac{\frac{a}{\sqrt{3}}}{b} \Rightarrow b = \frac{a}{\sqrt{3}} \cos \alpha; \quad \cos 2\alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \cos \alpha. \\
 a \cos 2\alpha &= \frac{a}{\sqrt{3}} \cos \alpha \\
 \sqrt{3}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) &= \cos \alpha \\
 2\sqrt{3} \cos^2 \alpha - \cos \alpha - \sqrt{3} &= 0 \\
 \cos \alpha_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \alpha_2 = -\frac{\sqrt{3}}{6} \quad (\text{доғал бұрыш}) \\
 \alpha &= 30^\circ. \\
 AC = b &= \frac{a}{\sqrt{3}} \cos 30^\circ = \frac{a}{2} \\
 CB &= \frac{\sqrt{3}}{2} a.
 \end{aligned}$$

$$\text{Жауабы: } \frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

4. Сүйір бұрышты ABC үшбұрышының (4 сурет.) BMC және ANC бұрыштары тік болатындай AD биіктігінен M , BP биіктігінен N нүктелері алынған. M және N нүктелерінің арақашықтығы $4 + 2\sqrt{3}$, $\angle MCN = 30^\circ$. CMN үшбұрышындағы CL биссектрисасының ұзындығын табыңыз.

Шешімі:



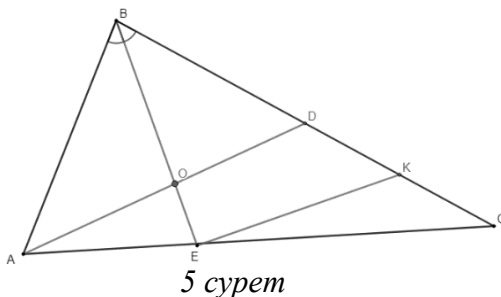
4 сурет

$$\begin{aligned}
 MN &= 4 + 2\sqrt{3}. \\
 CF \text{ шеңбер диаметрі болса } F, C, N, M &\text{ бір шеңберде жатады.} \\
 \triangle MLC &= \triangle NLC \text{ (екі бұрышы және } CF \text{ қабырғасы ортақ бойынша).} \\
 ML &= \frac{1}{2} MN = NL = 2 + \sqrt{3} \\
 \triangle NCL \text{ үшбұрышын алсақ: } \operatorname{tg} 15^\circ &= \frac{NL}{LC} \\
 \operatorname{tg}(45^\circ - 30^\circ) &= \frac{\operatorname{tg}(45^\circ - 30^\circ)}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \\
 LC &= \frac{NL}{\operatorname{tg}(45^\circ - 30^\circ)}; \\
 \frac{2 + \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}} &= \frac{3\sqrt{3} + 5}{\sqrt{3} - 1} = 7 + 4\sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Жауабы: } 7 + 4\sqrt{3}.$$

5. ABC үшбұрышының BE биссектрисасы мен AD медианасы өзара перпендикуляр және ұзындықтары 4 тең. ABC үшбұрышының қабырғаларын табыңыз. (5 сурет.)

Шешімі:



$$AD = BE = 4, BD = DC, BE \perp AD.$$

$AB = a$ деп белгілейік

Е нүктесінен AD кесіндісіне параллель жүргіземіз. Фалес теоремасы бойынша

$$EC = CK$$

$$\frac{AE}{EC} = \frac{KD}{DB}$$

$\triangle ABD$ тең бүйірлі үшбұрыш ($BE \perp AD$, BO биссектриса)

$AB = BD = DC = a$ белгілеп алсақ (AD медиана), $AO = OD$

$$AB = BC$$

$$\frac{AE}{EC} = \frac{KD}{DB}$$

$$\frac{a}{a} = \frac{2a}{a} \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{1}{2} \text{ (биссектриса қасиеті бойынша).}$$

$$\frac{AE}{EC} = \frac{KD}{DB} = 2 \Rightarrow CK = 2KD$$

$$CK = \frac{2}{3}a, KD = \frac{1}{3}a.$$

$$\frac{BO}{OD} = \frac{DB}{DK} \text{ (Фалес теоремасы бойынша);}$$

$$\frac{4-OE}{OE} = \frac{a}{\frac{1}{3}a}.$$

$$OE=1, BO=3.$$

$$AB = \sqrt{BO^2 + AO^2} = \sqrt{13};$$

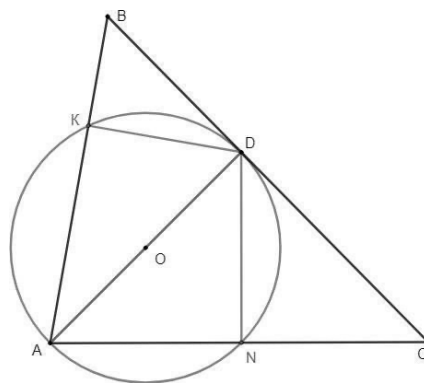
$$BC = 2AB = 2\sqrt{13};$$

$$AE = \sqrt{AO^2 + OE^2} = \sqrt{5};$$

$$AC = 3\sqrt{5}$$

Жауабы: $3\sqrt{5}, \sqrt{13}, 2\sqrt{13}$

6. ABC үшбұрышының (6 сурет.) BAC бұрышының биссектрисасы a тең. Берілген биссектрисаны шеңбердің диаметрі ретінде алсақ, осы шеңбер A нүктесінен санағанда AB қабырғасын 2:1 қатынаста және AC қабырғасын тең екіге бөледі. ABC үшбұрышының ауданын табыңыз.



6 сурет

$$BK = x, AK = 2x$$

$$AD = a, KD = c, BD = y$$

$\angle BAD = \alpha$ деп белгілейік.

$\angle AKD = \angle AND = 90^\circ$ (AD диаметр).

$\triangle AKD = \triangle AND$ (екі бұрышы және ортақ қабырғасы бойынша).

$$c = a \sin \alpha$$

$$AK = AN = 2x$$

$$\triangle ABC: \frac{3x}{4x} = \frac{y}{a} \text{ (биссектриса қасиеті бойынша)}$$

$$y = \frac{3}{4}a.$$

$$AN = NC, AN \perp DN \Rightarrow \triangle ADC \text{ тең бүйірлі үшбұрыш}$$

$$BC = \frac{7}{4}a.$$

$$\triangle AKD: c^2 = \frac{a^2}{3} - 4x^2$$

$$\triangle BKD: c^2 = \frac{3}{4}a^2 - x^2$$

$$a^2 - 4x^2 = \frac{3}{4}a^2 - x^2;$$

$$x = \frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{3}}a$$

$$c^2 = a^2 - \frac{7a^2}{48}$$

$$c = \frac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$$

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}AB \cdot DK = \frac{a^2\sqrt{35}}{16}$$

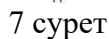
$$S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}AC \cdot DN = \frac{a^2\sqrt{35}}{12}$$

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ADC} = \frac{a^2\sqrt{35}}{16} + \frac{a^2\sqrt{35}}{12} = \frac{7a^2\sqrt{35}}{48}$$

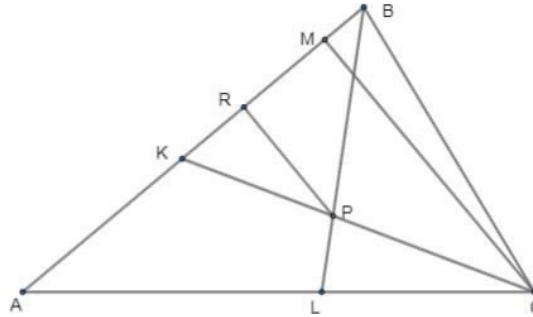
$$\text{Жауабы: } \frac{7a^2\sqrt{35}}{48}$$

7.7 суретте тең бүйірлі үшбұрыштың медианалардың және биссектрисалардың қиылысу нүктелерінің арақашықтығы 2 тең. Берілген үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің ұзындығы 20π болғандағы үшбұрыштың периметрін табыңыз.

Шешімі:



57



8 сурет

$PR \perp AB$, $CM \perp AB$ болатын дай R және M нүктелерін суреттегідей салайық. Онда $PR = 1,5$. Қатынасқа сәйкес айнымалы қолданамыз: $AK = 2n$, $BK = 3n$, $AL = 5m$, $LC = 3m$

Енді ABC үшбұрышының ауданы 6-ға тең біле тұрып негізінің мәнін таба аламыз.

AKC үшбұрышында **Минелай теоремасын** PL түзуіне қатысты теңдеуін

қолданайық:

$$\frac{AL}{L} \cdot \frac{CP}{P} \cdot \frac{KB}{BA} = 1 \Rightarrow \frac{CP}{PK} = \frac{3m}{5m} \cdot \frac{5n}{3n} = 1 \Rightarrow CP = KP$$

KMC үшбұрышы KRP үшбұрышына ұқсас (екі бұрышы бойынша):

$$\frac{MC}{KR} = \frac{KC}{KP} \Rightarrow CM = 3$$

$$\frac{PR}{PK} = \frac{PK}{KR}$$

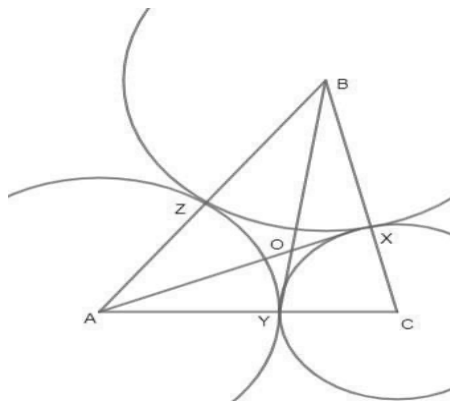
Енді ABC үшбұрышының ауданы 6-ға тең біле тұрып негізінің мәнін таба аламыз.

$$AB = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$$

Жауабы: 4

9. Үш шеңберлердің радиусының қатынастары 11:12:9 (9 сурет.), ал центрлері A, B және C. Және олар сырттай бір бірін X, Y және Z нүктелерінде жанап тұр. BY кесіндісін CZ қандай қатынаста бөледі?

Шешімі:



9 сурет

AX BY қиылысу нүктесі О болсын. Қатынасқа сәйкес $AY=11k$, $CX=9k$,

$BZ=12k$

$\frac{AY}{YC} \cdot \frac{CX}{XB} \cdot \frac{BZ}{ZA} = \frac{11k \cdot 9k \cdot 12k}{9k \cdot 11k \cdot 12k} = 1 \Rightarrow$ **Чева теоремасы** бойынша AX, BY және CZ

бір нүктеде қиылысады және ол нүкте О. BY кесіндісін $CZ \cdot \frac{BO}{OY}$ қатынаста

бөледі.

BCY үшбұрышында OX киушы түзуге қатысты **Менелая теоремасы**

бойынша келесі теңдеуді аламыз:

$$\frac{BO}{OY} \cdot \frac{YA}{AY} \cdot \frac{CX}{XB} = 1 \Rightarrow \frac{BO}{OY} = \frac{20k}{11k} \cdot \frac{12k}{9k} = \frac{80}{33}$$

Жауабы: $\frac{80}{33}$

Қорытынды

Алынған тақырыпты зерттеу барысында төмендегідей қорытындыларға келдік:

Мақаланы аяқтау нәтижесінде математикадан білім алушының немесе ұстаздың планиметрия есептерін қолдануда және тапсырмаларды орындауда жан-жақты болу, сыни ойлау дағдылары кеңейді. Үшбұрыштың қабырғаларына биіктіктердің, медианалардың, биссектрисалардың және перпендикулярлардың қиылысуының тамаша нүктелерінен басқа, үшбұрыштың тамаша нүктелері мен түзулері бар екенін біле қоймай, әрі күрделі, әрі шығармашылық есептерді шығаруда кеңінен қолдануға жол беретіні көрінеді. Алынған білімді оқу іс-әрекеттерінде қолдануға болады, алынған тапсырмаларды теорияны ретінде және нақты белгілі бір жағдайда мәселелерді шешуге қолдана алады. Математиканы оқытуда үшбұрыштың тамаша нүктелері мен түзулерін пайдалану тиімді деп есептеймін. Оларды білу көптеген мәселелерді шешуді айтарлықтай жылдамдатады. Үшбұрыштың тамаша нүктелері мен сызықтары белгілі бір қатынастар арқылы өзара байланысты екенін көрсетті.

Әдебиеттер тізімі

1. Қайыңбаев Ж.Т. Жаттығу, есеп ... «Математика және Физика журналы» №3, 2017. 2-4 б. Джанбулат Кайынбаев. Қ. Үдербаева., Тең бүйірлі және тік бұрышты үшбұрыштарға іштей және сырттай сызылған шеңберлерге байланысты күрделі есептерді шешу тәсілдері.
2. SDU Bulletin: Pedagogy and Teaching methods 2021/2 (55) Джанбулат Кайынбаев. Т.С. Манап., Үшбұрыштың биссектрисасы, медианасы және олардың қасиеттерін пайдаланып күрделі геометриялық есептерді шешу тәсілдері.
3. SDU Bulletin: Pedagogy and Teaching methods 2021/2 (55) Джанбулат Кайынбаев. Нұрпейіс Марлен. «Шеңбер мен дөңгелекке байланысты күрделі есептердің берілу тәсілдері және оларды шешу жолдары», Suleyman Demirel University Bulletin: Pedagogy and Teaching Methods, 2022/3 (60) [S.l.], v. 60, n. 3, p. 93 - 105, sep. 2022. ISSN 2709-264X.
4. Джанбулат Кайынбаев, Уәлихан Нұрай «Білім алушыларды төртбұрыштарға (Трапециядан басқа) байланысты күрделі есептерді шешуге үйрету әдістемесі», Suleyman
5. Demirel University Bulletin: Pedagogy and Teaching Methods, 2022/3 [S.l.], v. 60, (60) n. 3, p. 1 - 12 sep. 2022 ISSN 2709-264X.
6. Бахыт Сытдыхов. Джанбулат Кайынбаев. Исмухаметова Айжан. «Трапецияларға байланысты күрделі есептер және оларды шешу тәсілдері», Suleyman Demirel University
7. Bulletin: Pedagogy and Teaching Methods, 2022/3 (60) [S.l.], v. 60, n. 3, p. 33 - 50, nov. 2022. ISSN 2709-264X.
8. Генденштейн Л.Э., Ершова А.П., Ершова А.С. Наглядный справочник по математике

с примерами. Для абитуриентов, школьников, учителей. – М.: Илекса, 2005, – 192 с.

9. Гусев В.А., Мордкович А. Г. Математика: Справ. материалы – М.:Просвещение, 1999. – 416 с.

10. Кулагин Е.Д. и др 3000 конкурсных задач по математике. – М., 2003.– 380 с.

11. Бидосов Ә. Математиканы оқыту әдістемесі: Оқу құралы. 2-ші бақылым. Алматы, 2007. – 262 б.

12. Фридман Л.М., Турецкий Е.Н. Как научиться решать задачи: Пособие для учащихся. 2-е изд., перераб. и доп. – М.:Просвещение, 1984. – 175 с.

13. Темербекова А.А. Методика преподавания математики: М.:Гуманит. изд.центр ВЛАДОС, 2003. – 176 с.

References

1. Qaiyñbaev J.T. Jattyǵu, esep ... «Matematika jáne Fizika jurnalı» №3, 2017. 2-4 b. Janbulat Kaiynbaev. Q. Üderbaeva., Teñ büiirli jáne tık bürısty üsbürıstargá iştei jáne syrttai syzylǵan şeñberlerge bailanysty kürdeli esepterdı şeşu tásilderi.

2. SDU Bulletin: Pedagogy and Teaching methods 2021/2 (55) Janbulat Kaiynbaev. T.S. Manap., Üsbürıstyñ bisektrıasy, medianasy jáne olardıñ qasietterin paidalanyp kürdeli geometrialıq esepterdı şeşu tásilderi.

3. SDU Bulletin: Pedagogy and Teaching methods 2021/2 (55) Janbulat Kaiynbaev. Nürpeis Marlen. "Şeñber men döñgelekke bailanysty kürdeli esepterdıñ berılı tásilderi jáne olardy şeşu joldary". Suleyman Demirel University Bulletin: Pedagogy and Teaching Methods, 2022/3 (60) [S.l.], v. 60, n. 3, p. 93 - 105, sep. 2022. ISSN 2709-264X.

4. Janbulat Kaiynbaev, Uälihan Nürai "Bılım aluşıylardy törtbürıstargá (Trapeziadan basqa) bailanysty kürdeli esepterdı şeşuge üiretu ädistemesi".

5. Suleyman Demirel University Bulletin: Pedagogy and Teaching Methods, 2022/3 [S.l.], v. 60, (60) n. 3, p. 1 - 12 sep. 2022 ISSN 2709- 264X.

6. Bahyt Sytdyhov. Janbulat Kaiynbaev. İsmuhametova Aijan. "Trapezialargá bailanysty kürdeli esepter jáne olardy şeşu tásilderi". Suleyman Demirel University

7. Bulletin: Pedagogy and Teaching Methods, 2022/3 (60) [S.l.], v. 60, n. 3, p. 33 - 50, nov. 2022. ISSN 2709-264X.

8. Gendenştein L.E., Erşova A.P., Erşova A.S. Naglädnyi spravochnik po matematike s primerami. Dlä abıturentov, şkölnikov, uchitelei. – М.: İleksa, 2005, – 192 s.

9. Gusev V.A., Mordkovich A. G. Matematika: Sprav. materialy – М.:Prosveşenie, 1999. – 416 s.

10. Kulagin E.D. i dr 3000 konkursnyh zadach po matematike. – М., 2003.– 380 s.

11. Bidosov Ä. Matematikany oqytu ädistemesi: Oqu qüraly. 2-şıbasıylım. Almaty, 2007. – 262 b.

12. Fridman L.M., Tureski E.N. Kak nauchitsä reşät zadachi: Posobie dlä uchaşıhsä. 2-e izd., pererab. İ dop. – М.:Prosveşenie, 1984. – 175 s.

13. Temerbekova A.A. Metodika prepodovania matematiki: М.:Gumanit. izd.sentr VLADOS, 2003. – 176 s.

Dzhanbulat Kayinbaev¹, Zhandos Bekish¹

¹SDU University, Kaskelen, Kazakhstan

*e-mail: manshzhandos@gmail.com

METHODS FOR SOLVING COMPLEX GEOMETRIC PROBLEMS USING REMARKABLE TRIANGLE LINES

Abstract. Half of all geometry problems are related to triangles, and half of all triangle problems contain problems on the altitude, bisector and median of a triangle. The fact that there are

so many problems and exercises with triangles means that knowledge of all properties and methods of solving these problems is very important for future teachers, and therefore more attention should be paid to this issue. This article discusses methods of solving problems involving altitude, bisector, median and their combination.

Keywords: problem (exercise), triangle, triangle elements, types of triangles, angle, angle bisector, triangle altitude, formulas for finding triangle altitude, properties of triangle altitude, triangle bisector, properties of triangle bisector, triangle median, length of median in triangle, properties of medians in triangle, Menelaus theorem

Жанболат Кайынбаев¹, Жандос Бекиш¹

¹SDU University, Каскелен, Казахстан

*e-mail: manshzhandos@gmail.com

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЛОЖНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ ЛИНИЙ ТРЕУГОЛЬНИКА

Аннотация. Половина всех геометрических задач связана с треугольниками, а половина всех задач с треугольниками содержит задачи на высоту, биссектрису и медиану треугольника. То, что задач и упражнений с треугольниками так много, означает, что знание всех свойств и способов решения этих задач очень важно для будущих учителей, и поэтому необходимо уделять больше внимания этому вопросу. В статье рассматриваются методы решения задач, связанных с высотой, биссектрисой, медианой и их комбинацией.

Ключевые слова: задача (упражнение), треугольник, элементы треугольника, виды треугольников, угол, биссектриса угла, высота треугольника, формулы для нахождения высоты треугольника, свойства высоты треугольника, биссектриса треугольника, свойства биссектрисы треугольника, медиана треугольника, длина медианы в треугольнике, свойства медиан в треугольнике, теорема Менелай

Received 2 February 2024